ОТЗЫВ официального оппонента на диссертацию Сергея Викторовича Корнева «Исследование некоторых классов дифференциальных уравнений и включений методами нелинейного анализа», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Геометрические и топологические методы анализа нелинейных задач в последние десятилетия доказали свою высокую эффективность. Особенно важную роль они играют в многозначном анализе при исследовании разнообразных задач теории дифференциальных включений и управляемых систем. Применение этих (достаточно ясных и наглядных) методов позволяет не только доказывать локальные и глобальные теоремы существования решений, но и изучать топологическую структуру множеств решений, их непрерывную зависимость от начальных данных и параметров, решать общие краевые, периодические задачи и различные другие проблемы. Эти методы привлекают внимание многих исследователей и описаны в ряде монографий и обзоров, вышедших в последние годы. Поэтому тема диссертации С.В. Корнева, на мой взгляд, безусловно является актуальной.

Диссертационная работа С.В. Корнева посвящена разработке метода направляющих функций трёх новых типов: направляющих функций на заданном множестве, интегральных и многолистных направляющих функций. Для этого была развита теория топологической степени для новых классов многозначных (мультиотображений) отображений, в результате были получены новые приложения к задачам о существовании периодических и ограниченных решений, а также о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений.

Соответственно, перед диссертантом стояло несколько задач, подчеркну две. Во-первых, необходимо было разработать ряд новых подходов в теории топологической степени мультиотображений, которые можно было бы использовать при исследовании дифференциальных включений, а во-вторых, исследовать, в том числе с применением полученных методов теории топологической степени ряд конкретных проблем поиска периодических решений, асимптотического поведения решений и бифуркации семейств решений систем, описываемых функционально-дифференциальными и дифференциальными уравнениями и включениями. По моему мнению, с обеими задачами С.В. Корнев справился вполне успешно.

Остановимся подробнее на каждой из указанных задач. С самого начала исследования неподвижных точек и топологических характеристик мультиотображений выделились два достаточно плодотворных подхода. Первый из них, который можно назвать аналитическим, основан на понятии однозначной аппроксимации мультиотображения и восходит к J. von Neumann’у и S. Kakutani. Второй, базирующийся на конструкциях алгебраической топологии (теорема Виеториса и ее обобщения), берет свое начало от работы S. Eilenberg’a и D. Montgomery. Поначалу первый подход, хотя и выглядел более «прозрачным», казался значительно менее универсальным, поскольку применялся лишь к мультиотображениям с выпуклыми значениями. Однако в последовавших работах А.Д. Мышкиса, Ю.Г. Борисовича, Ю.Е. Гликлиха, L. Gorniewicz’a, W. Kryszewski метод однозначных аппроксимаций был распространен и на невыпуклозначные отображения и эффективно продемонстрировал свои возможности.

Именно аппроксимативный подход и развивает, в основном, С.В. Корнев во второй главе своей диссертации. Диссертант вводит и изучает топологическую степень для мультиотображений, которые можно естественно назвать абстрактной формой оператора сдвига по траекториям дифференциальных включений, управляемых систем, а также дифференциальных уравнений, не обладающих (достаточно жестким) свойством единственности решения. Эти мультиотображения имеют вид композиции аппроксимируемого мультиотображения с непрерывным однозначным отображением. Для мультиотображений такого класса вводится топологическая степень в конечномерном и нормированном пространствах, описываются ее основные свойства и даются применения к теоремам о неподвижной точке. Затем построенная топологическая характеристика используется для конструирования индекса совпадения мультиотображений данного класса и линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса. Указанные построения распространяются также на случай мультиотображений, обладающих непрерывными сечениями. Помимо выпуклозначных полунепрерывных снизу мультиотображений, к их числу принадлежит, например, суперпозиционный мультиоператор, порождаемый почти полунепрерывным снизу мультиотображением, что дает возможность применять полученные результаты к исследованию дифференциальных включений с невыпуклозначными правыми частями. Полученные во второй главе абстрактные результаты содержит большой «запас» материала. Этот материал в дальнейшем может быть использован в приложениях к периодическим и краевым задачам и к вопросам управляемости.

В третьей, четвертой и пятой главах теория топологической степени применяется для развития метода направляющих функций в трех направлениях: метод направляющих функций на заданном множестве, метод интегральных и метод многолистных направляющих функций. Основы этого метода были заложены еще в шестидесятые годы М.А. Красносельским и А.И. Перовым и с тех пор он развивался и применялся в работах многих ученых во всём мире как весьма мощное и в то же время геометрически наглядное средство. Вклад диссертанта в развитие этого метода заключается в следующем.

Во-первых, разработан и обоснован метод интегральной направляющей функции для функционально-дифференциальных включений различных классов, который используется для поиска их периодических решений, исследования асимптотического поведения решений (отметим, что классический метод здесь принципиально не применим). Несомненным достижением можно считать обобщение метода интегральных направляющих функций на случай дифференциальных включений с каузальными операторами, или операторами типа Вольтерра, впервые введенными Л. Тонелли и А.Н. Тихоновым. Понятие каузального оператора оказалось мощным инструментом для унификации задач в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнений Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др.

Во-вторых, класс рассматриваемых задач существенно расширен за счет их решения для случая систем, описываемых дифференциальными включениями как с выпуклозначной правой частью, так и с правой частью, не обладающей свойством выпуклости значений. Для эффективного решения этой задачи применяется, в том числе, модификация классического понятия направляющей функции – направляющая функция на заданном множестве. Существенным преимуществом по сравнению с классическим подходом является возможность проверять основное условие направляющей функции на области пространства, зависящей от самой функции.

В-третьих, осуществлена достаточно широкая экспансия метода многолистных направляющих функций (МНФ), впервые предложенного Д.И. Рачинским, на область дифференциальных включений. Это распространение не явилось чисто формальным, поскольку затронуло как такие аспекты теории, которые несут сугубо «многозначную» специфику (например, выполнение условия направляемости лишь для некоторых элементов из правой части включения), так и те, которые являются новыми и в случае дифференциальных уравнений. Здесь укажем понятия обобщенных МНФ, наборов МНФ, но, прежде всего, отметим введение в рассмотрение негладких МНФ, которые могут возникать, например, как «верхние огибающие» семейства функций, каждая из которых является направляющим потенциалом лишь в своей части фазового пространства. Заметим, что негладкими предполагаются также интегральные направляющие функции и направляющие функции на заданном множестве. Применение комплекса указанных методов позволило получить целый ряд существенно новых результатов о существовании периодических и ограниченных решений, о качественном поведении решений дифференциальных уравнений и включений.

Подводя итог, следует отметить, что все полученные автором результаты являются новыми и интересными, они порождают достаточно глубокие приложения в теории дифференциальных уравнений и включений, а также в математической теории управления. Строгие доказательства полученных результатов проводится достаточно убедительно и на высоком научном уровне.

В качестве недостатков-опечаток можно привести следующие замечания:

- на стр. 21 в пунктах 16 и 17 повторяется одна и та же фраза «Пусть X,Y – топологические пространства», которую можно было привести только один раз до начала изложения этих пунктов;
- на стр. 27 в теореме 1.2.17 два условия обозначены одной буквой;
- на стр. 89, как мне показалось, следовало бы для удобства привести подробное доказательство фредгольмовости оператора l и l-компактности семейства мультиоператоров $G(\cdot,\lambda)$;
- на стр. 101 строка 3 снизу явно пропущена фраза про условие подлинейного роста;
- на стр. 113 рассуждения в начале доказательства теоремы 3.2.2 практически совпадают с аналогичными, приведенными ранее в доказательстве теоремы 3.2.1, поэтому можно было ограничиться соответствующей ссылкой;

- на стр. 134 доказательство замкнутости мультиотображения B можно было бы привести полностью;
- на стр. 183 в силу неочевидности неравенства $t_* > T$ было бы уместно привести его полное доказательство, по крайней мере, его прокомментировать;
- на стр. 184 строка 4 сверху: то же самое касается и равенства топологических степеней.

Однако необходимо отметить, что приведенные мелкие грамматические недочёты не снижают общего положительного впечатления о работе и ее научной значимости.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Основные результаты диссертации своевременно и полностью опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК РФ. Работа прошла полноценную апробацию на многих семинарах и конференциях международного уровня.

Считаю, что диссертация «Исследование некоторых классов дифференциальных уравнений и включений методами нелинейного анализа» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, в том числе п. 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий базовой кафедрой Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет» "Высшая школа экономики"

А.М. Красносельский

119048, Москва, ул. Усачёва, 6
Email: sashaamk@iitp.ru , Тел. +7(495) 772-95-90

Подпись заверяю
Инспектор по кадрам 2 категории
Отдела кадрового делопроизводства
Управления персонала
Юдина Е.А.